

## Een Parabool Beschreven Door 3 Punten

Stel: je weet dat de functie  $f$  door  $n$  aantal bekende punten gaat, kan je er dan achter komen wat  $f$  is? Dat kan, alleen gaan we er dan vanuit dat  $f$  een polynoom is.

Voor  $n$  aantal punten is er een polynoom die door deze punten gaat met een graad van  $n - 1$  (behalve als twee punten hetzelfde  $x$ -coördinaat hebben).

Voor twee punten is het makkelijk om  $f$  te vinden, omdat we dan een stelsel van twee lineaire vergelijkingen oplossen:

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1), (x_2, y_2) \\ & \begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \\ & ax_1 + b = y_1 \Rightarrow b = y_1 - ax_1 \\ & ax_2 + y_1 - ax_1 = y_2 \\ & ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1 \\ & a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \\ & a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ & b = y_1 - ax_1 \end{aligned}$$

Voor  $n$  aantal punten, krijg je een stelsel van  $n$  aantal vergelijkingen met een graad van  $n - 1$ .

We kunnen hetzelfde idee gebruiken om een polynoom met graad 2 (een parabool) te vinden. Dan krijgen we dit stelsel:

$$S_1 = \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Om dit stelsel op te lossen, is er een andere techniek die we kunnen gebruiken die het oplossen simpeler maakt.

Laat  $m_1 = -\frac{x_2^2}{x_1^2} = -\frac{x_2}{x_1}$  en vermenigvuldig de eerste vergelijking van het stelsel met  $m_1$ :

$$S_2 = \begin{cases} -ax_2^2 + bm_1x_1 + cm_1 = y_1m_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Als we nu de eerste en tweede vergelijking bij elkaar optellen valt de  $ax_2^2$  term weg:

$$\begin{aligned} -ax_2^2 + bm_1x_1 + cm_1 + ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 = y_1m_1 + y_2 \\ bm_1x_1 + cm_1 + bx_2 + c &= y_2 = y_1m_1 + y_2 \\ (m_1x_1 + x_2)b + (m_1 + 1)c &= y_1m_1 + y_2 \end{aligned}$$

Als we nu hetzelfde doen met de eerste en derde vergelijking krijgen we dit:

$$\begin{aligned} m_2 &= -\frac{x_3^2}{x_1^2} = -\frac{x_3}{x_1} \\ (m_2x_1 + x_3)b + (m_2 + 1)c &= y_1m_2 + y_3 \end{aligned}$$

Nu houden we dit stelsel over:

$$S_3 = \begin{cases} (m_1x_1 + x_2)b + (m_1 + 1)c = y_1m_1 + y_2 \\ (m_2x_1 + x_3)b + (m_2 + 1)c = y_1m_2 + y_3 \end{cases}$$

Deze kunnen we weer op dezelfde manier oplossen. (De formule voor een stelsel met twee lineaire vergelijkingen kan ook gebruikt worden, maar in dit geval minder handig vanwege de coëfficiënt voor de  $c$ )

Laat  $m_3 = -\frac{(m_2x_1 + x_3)}{(m_1x_1 + x_2)}$  en vermenigvuldig de eerste vergelijking uit stelsel  $S_3$  met  $m_3$ :

$$-(m_2x_1 + x_3)b + m_3(m_1 + 1)c = m_3(y_1m_1 + y_2)$$

Voeg deze vergelijking toe aan de tweede vergelijking uit het stelsel:

$$\begin{aligned} -(m_2x_1 + x_3)b + m_3(m_1 + 1)c + (m_2x_1 + x_3)b + (m_2 + 1)c &= m_3(y_1m_1 + y_2) + y_1m_2 + y_3 \\ m_3(m_1 + 1)c + (m_2 + 1)c &= m_3(y_1m_1 + y_2) + y_1m_2 + y_3 \end{aligned}$$

Nu nog oplossen voor  $c$ :

$$\begin{aligned} c(m_3(m_1 + 1) + (m_2 + 1)) &= m_3(y_1m_1 + y_2) + y_1m_2 + y_3 \\ c &= \frac{m_3(y_1m_1 + y_2) + y_1m_2 + y_3}{m_3(m_1 + 1) + m_2 + 1} \end{aligned}$$

Nu kunnen we ook oplossen voor  $b$  met een vergelijking uit  $S_3$ :

$$\begin{aligned} (m_1x_1 + x_2)b + (m_1 + 1)c &= y_1m_1 + y_2 \\ (m_1x_1 + x_2)b &= y_1m_1 + y_2 - (m_1 + 1)c \\ b &= \frac{y_1m_1 + y_2 - (m_1 + 1)c}{m_1x_1 + x_2} \end{aligned}$$

En ook voor  $a$  met een vergelijking uit  $S_1$ :

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_1^2 &= y_1 - bx_1 - c \\ a &= \frac{y_1 - bx_1 - c}{x_1^2} \end{aligned}$$

